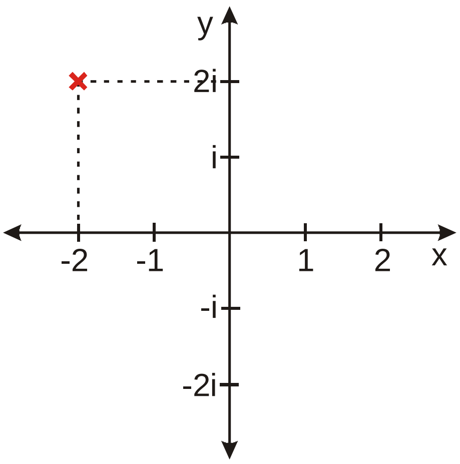
6.2.2 Goniometrický tvar komplexních čísel I

Předpoklady: 4212, 4213, 6201

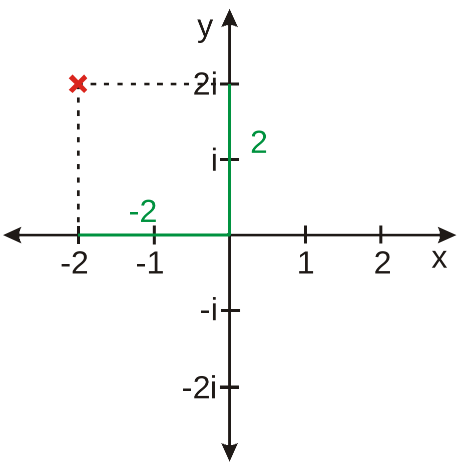
Pedagogická poznámka: Goniometrický tvar komplexních čísel není pro studenty nijak obtížný. Velmi obtížné je pro studenty si po roce vzpomenout na hodnoty goniometrických funkcí. Varuji je dopředu a případnou neznalost trestám. Bez připomenutí hodnot goniometrických funkcí ztrácí následující hodiny smysl, protože studenti nebudou řešit problémy komplexních čísel, ale pouze hodnoty goniometrických funkcí.

Pedagogická poznámka: Na část hodiny, která se zabývá převáděním z algebraického do goniometrického tvaru je třeba minimálně dvacet minut, aby studenti kromě výkladu o hodině stačili alespoň první dva body příkladu 5.

Př. 1: Nakresli do Gaussovy roviny obraz čísla $z = -2 + 2i$.

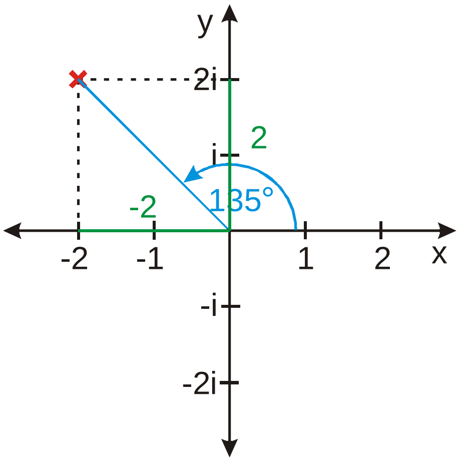


Obraz bodu $z = -2 + 2i$ je určen pomocí dvou čísel $[-2;2]$, kartézských souřadnic.
Jak kartézské souřadnice určují polohu bodu?
$[-2;2]$ = posuň se ve vodorovném směru (ve směru osy x) o dva zpátky (o –2) a pak se posuň ve svislém směru (ve směru osy y) od dva nahoru (o +2) a dostaneš se do bodu $[-2;2]$.



Je možné se do stejného místa dostat i jiným způsobem (předpokládáme, že stojíme v počátku a díváme se v kladném směru osy x)?

Způsobů je nekonečně mnoho. Jiným jednoduchým je:
Otoč se o úhel $135°$, pak ujdi přímým směrem vzdálenost $\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



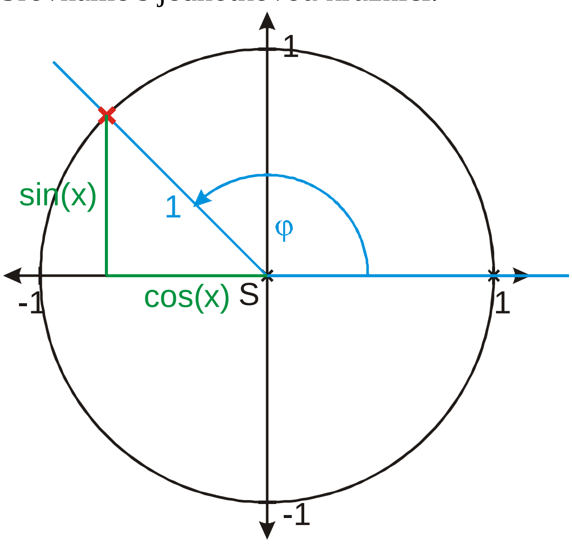
$\Rightarrow$ Polohu obrazu čísla $z=-2+2i$ jde určit více způsoby:

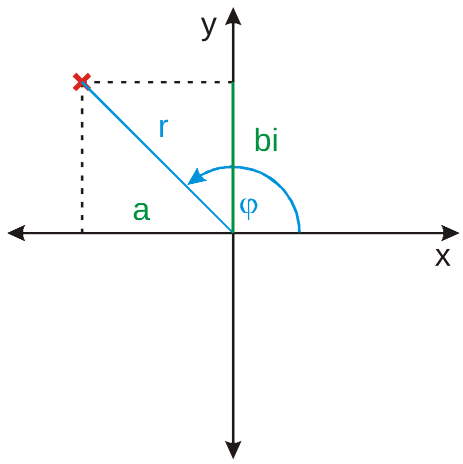
- pomocí čísel $[-2;2]$ (kartézské souřadnice),
- pomocí čísel $\left[2\sqrt{2};135°\right]$ (polární souřadnice),
- atd.

Jak se říká polárním souřadnicím?

- $2\sqrt{2}$ - vzdálenost od počátku = **absolutní hodnota komplexního čísla** $|z|$ (značí se i r),
- $135°$ - úhel otočení od kladného směru osy x = **argument**, značí se φ.

Jaký je vztah mezi $[a;b]$ a $[r;\varphi]$?
Srovnáme s jednotkovou kružnicí.





Souřadnice zakresleného bodu mají hodnoty: $[\cos\varphi;\sin\varphi]$.

Stejný obrázek jako vlevo, ale vzdálenost bodu od počátku je r místo 1 $\Rightarrow$ souřadnice zakresleného bodu mají hodnoty:

$[r\cos\varphi; r\sin\varphi]$. Dosud jsme je označovali $[a;b]$ $\Rightarrow$ platí: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Zapíšeme algebraický tvar komplexního čísla pomocí $[r;\varphi]$:

$z = a + bi = (r\cos\varphi) + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ = **goniometrický tvar komplexního čísla.**

Goniometrický tvar není jednoznačný, obě goniometrické funkce se opakují po 2π, proto platí: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)]$

Goniometrickým tvarem komplexního čísla rozumíme jeho vyjádření ve tvaru $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde φ je argument komplexního čísla *z* a *r* je jeho absolutní hodnota.

Př. 2: Zapiš komplexní číslo $z = -2 + 2i$ v goniometrickém tvaru.

Goniometrický tvar $\Rightarrow$ potřebujeme znát φ a *r*, obojí už jsme zjistili z obrázků:

- $r = |z| = 2\sqrt{2}$,
- $\varphi = 135° = \frac{3}{4}\pi$,

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$.

Argument komplexních čísel se téměř výhradně udává v radiánech.

Jak převedeme číslo z goniometrického tvaru do algebraického?

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a + bi \Rightarrow$ stačí zapsat hodnoty goniometrických funkcí a roznásobit závorku:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -2 + 2i.$$

Př. 3: Zapiš komplexní čísla v algebraickém tvaru:

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi$

c) $z_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

d) $z_4 = 4\left(\cos\frac{70}{3}\pi + i\sin\frac{70}{3}\pi\right)$

e) $z_5 = 5(\cos 40° + i\sin 40°)$

f) $z_6 = 2(\cos 2 + i\sin 2)$

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$

b) $z_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

c) $z_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = z_3 = 2\left[0 + i(-1)\right] = -2i$

d) $z_4 = 4\left(\cos\frac{70}{3}\pi + i\sin\frac{70}{3}\pi\right)$

Musíme najít základní hodnotu úhlu $\frac{70}{3}\pi = \frac{66}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 22\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$.

$z_4 = 4\left(\cos\frac{70}{3}\pi + i\sin\frac{70}{3}\pi\right) = 4\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = 4\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -2 - i2\sqrt{3}$

e) $z_5 = 5(\cos 40° + i\sin 40°)$

Pro úhel $40°$ neznáme tabulkové hodnoty goniometrických funkcí $\Rightarrow$ s kalkulačkou jen přibližný výsledek: $z_5 = 5(\cos 40° + i\sin 40°) \doteq 5(0{,}77 + i\cdot 0{,}64) = 3{,}85 + 3{,}2i$.

f) $z_6 = 2(\cos 2 + i\sin 2)$

Pro úhel $2\,\mathrm{rad}$ neznáme tabulkové hodnoty goniometrických funkcí $\Rightarrow$ s kalkulačkou jen přibližný výsledek: $z_6 = 2(\cos 2 + i\sin 2) \doteq 2(-0{,}42 + i\cdot 0{,}91) = -0{,}84 + 1{,}82i$.

Př. 4: Petáková:
strana 137/cvičení 32 z_4
strana 137/cvičení 33

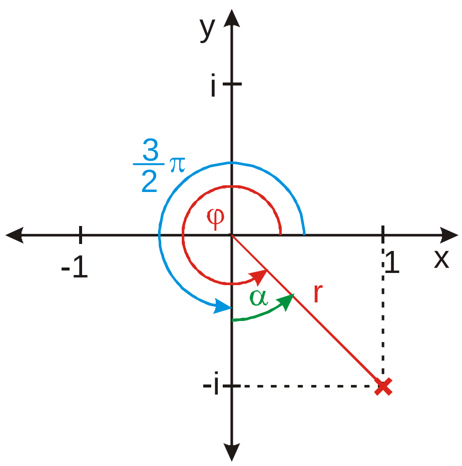
Na druhou stranu (z algebraického do goniometrického tvaru) to bude horší.

Chceme převést do goniometrického tvaru $z = 1 - i$ $\Rightarrow$ musíme najít r a φ.

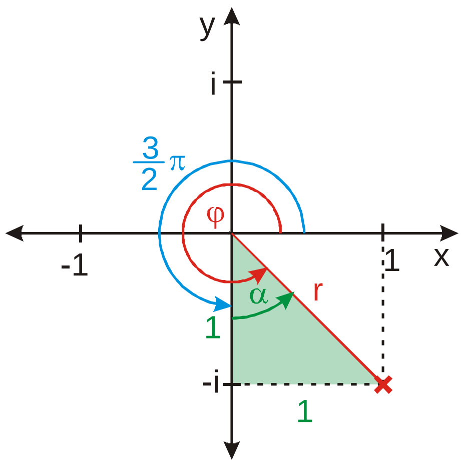
Najít r není problém: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Jak najít φ?

1. pomocí obrázku



Stačí určit úhel α a máme i úhel φ.



Zelený trojúhelník: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\varphi = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$.

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

2. pomocí rovnic

Vezmeme algebraický tvar a budeme ho upravovat na goniometrický:

$$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right).$$

Srovnáme s goniometrickým tvarem: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\Rightarrow$ platí:

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|}$ $\qquad$ $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|}$.

$\Rightarrow$ Můžeme určit hodnoty sin a cos pro hledaný argument a z nich argument určit

$z = 1 - i$, $r = \sqrt{2}$ (už jsme spočítali).

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{7}{4}\pi$

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

Př. 5: Převeď do goniometrického tvaru čísla:

a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\qquad$ b) $z_2 = 2i$ $\qquad$ c) $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i$

d) $z_4 = -2$ $\qquad$ e) $z_5 = \pi$ $\qquad$ f) $z_6 = 2 - i2\sqrt{3}$

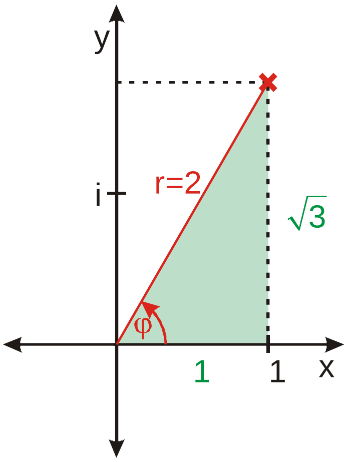
a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

1. pomocí obrázku

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$,

$\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$,

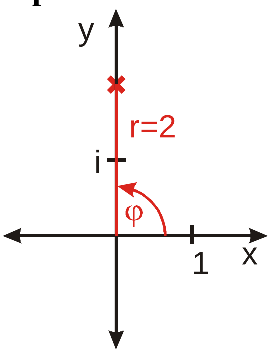
$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Zelený trojúhelník: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) $z_2 = 2i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + 2^2} = 2$

1. pomocí obrázku



$\Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$z = 2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{0}{2} = 0$

$\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{2}{2} = 1$

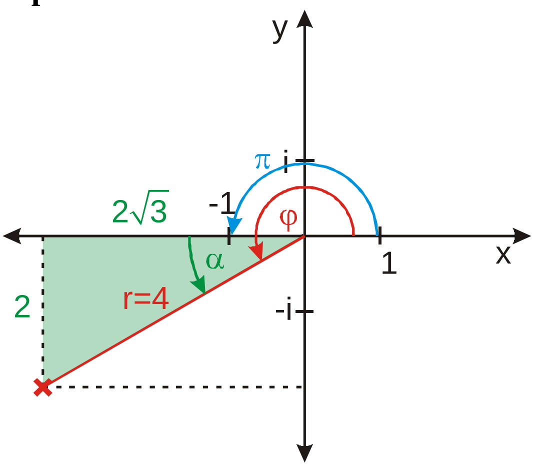
$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = 0$,

$\sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$,

$z = 2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$

1. pomocí obrázku



Zelený trojúhelník: $\sin\alpha = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

2. pomocí rovnic

$\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí:

$\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{7}{6}\pi$,

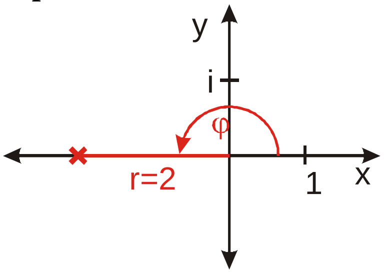
$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi + i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$.

$$\varphi = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi,$$

$$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right).$$

d) $z_4 = -2 \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$

1. pomocí obrázku



$\Rightarrow\; \varphi = \pi$

$z = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

2. pomocí rovnic

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-2}{2} = -1$$

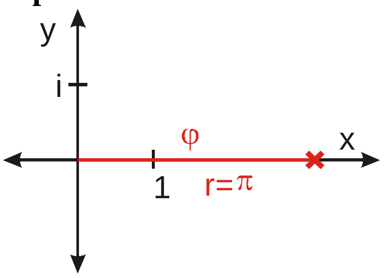
$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{0}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0 \Rightarrow\; \varphi = \pi$,

$z = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

e) $z_5 = \pi \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\pi^2+0^2} = \pi$

1. pomocí obrázku



$\Rightarrow\; \varphi = 0$

$z = \pi = \pi(\cos 0 + i\sin 0)$

2. pomocí rovnic

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

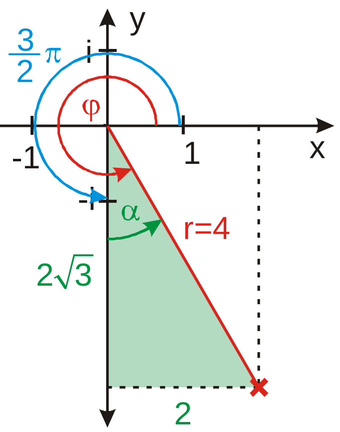
$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{0}{\pi} = 0$$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0 \Rightarrow\; \varphi = 0$,

$z = \pi = \pi(\cos 0 + i\sin 0)$.

f) $z_6 = 2 - i2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+4\cdot 3} = 4$

1. pomocí obrázku



Zelený trojúhelník: $\sin\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi + \alpha = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$z = 2 - i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

2. pomocí rovnic

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = \frac{1}{2}$,

$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow\; \varphi = \frac{5}{3}\pi$,

$z = 2 - i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je jednou z výjimek, kdy nechávám studenty, kteří ho nestihnou ve škole dopočítat zbytek doma. Jeho úspěšné zvládnutí je podmínkou příští hodiny. Samozřejmě mi stačí, aby studenti použili pouze jednu metodu, která jim více vyhovuje. Já osobně jim doporučuji obrázek kvůli lepší představě.

Pedagogická poznámka: Největší problémy se vyskytují u bodu d) (zápis ve tvaru $z_4 = -2(\cos\pi + i\sin\pi)$ a bodu e) kde studenti nerozlišují hodnotu π jako komplexního čísla od hodnoty π jako hodnoty argumentu.

Př. 6: Petáková:
strana 137/cvičení 30 z_4, z_6, z_7

Shrnutí: V goniometrickém tvaru komplexního čísla používáme vzdálenost od počátku a úhel popisující polohu čísla v Gaussově rovině.